

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

УДК 519.71, 517.935, 623.746



Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат

Ваня Рафаелович БАРСЕГЯН^{1,2}, Тамара Алексановна СИМОНЯН²,
Арам Гагикович МАТЕВОСЯН²

¹ Институт механики НАН Армении

0019, Республика Армения, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б

² Ереванский государственный университет

0025, Республика Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

Аннотация. Работа посвящена вопросам математического моделирования пространственного движения квадрокоптера и построению законов программного управления, обеспечивающих полет с заданными в промежуточные моменты времени значениями части координат фазового вектора. Используется структурная схема квадрокоптера с четырьмя винтовыми двигателями, позволяющая осуществлять перемещение в пространстве, вертикальный взлет и посадку. На основе законов теоретической механики получена система дифференциальных уравнений, описывающих пространственное движение такого квадрокоптера. Для линеаризованной математической модели движения квадрокоптера решена задача построения законов программного управления с заданными начальными и конечными значениями фазового вектора, а также значениями части координат фазового вектора в два промежуточных момента времени. Получено необходимое и достаточное условие существования программного управления и описано соответствующее движение квадрокоптера. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. В качестве иллюстрации полученных результатов для конкретных начальных, конечных и промежуточных значений получены явные выражения функции программного управления, программного движения и построены соответствующие графики.

Ключевые слова: математическая модель движения квадрокоптера, управление полетом, многоточечные промежуточные условия, фазовые траектории

Для цитирования: Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г. Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 29–42. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. R. Barseghyan, T. A. Simonyan, A. G. Matevosyan, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates

Vanya R. BARSEGHYAN^{1,2}, Tamara A. SIMONYAN², Aram G. MATEVOSYAN²¹ Institute of Mechanics of National Academy of Science of the Republic of Armenia

24B Marshal Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Republic of Armenia

² Yerevan State University

1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Republic of Armenia

Abstract. The work is devoted to the issues of mathematical modeling of the spatial motion of a quadcopter and the construction of program control laws that ensure flight with the values of part of the coordinates of the phase vector specified at intermediate times. A structural diagram of a quadcopter with four propeller engines is used, which allows for movement in space, vertical takeoff and landing. Based on the laws of theoretical mechanics, a system of differential equations is obtained that describes the spatial motion of such a quadcopter. For a linearized mathematical model of quadcopter motion, the problem of constructing program control laws with given initial and final values of the phase vector, as well as the values of part of the coordinates of the phase vector at two intermediate moments of time, has been solved. A necessary and sufficient condition for the existence of program control is obtained and the corresponding movement of the quadcopter is described. Control functions and corresponding phase trajectories of motion are constructed. To illustrate the results obtained, for specific initial, final and intermediate values, explicit expressions of the program control function, program motion are obtained and the corresponding graphs are constructed.

Keywords: mathematical model of quadcopter motion, flight control, multi-point intermediate conditions, phase trajectories

Mathematics Subject Classification: 93C05, 93C85, 70Q05.

For citation: Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Matevosyan A.G. On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 29–42. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Все большую популярность получают беспилотные летательные аппараты в виде многовинтовых устройств, а чаще — квадрокоптеров. Квадрокоптеры обладают рядом преимуществ, таких как надежность и простота конструкции, большая стабильность, компактность и маневренность, малая взлетная масса. Область применения квадрокоптеров достаточно широка и не ограничена военной отраслью (см. [1–3]). Например, квадрокоптеры могут быть использованы как недорогое и эффективное средство для получения фото- и видеоизображений с воздуха. Квадрокоптер хорошо подходит для наблюдения и контроля объектов, территорий и зон, доступ к которым затруднен, или в условиях, непригодных для человека (см. [2–4]). Исследованиям различных задач, связанных с полетом (эксплуатацией) квадрокоптеров, посвящены, в частности, работы [5–7]. В [8] предложен способ управления квадрокоптером, оснащенным манипулятором. В [9–11] изложены основы моделирования и алгоритмы управления квадрокоптером.

В прикладных задачах при моделировании и проектировании движений различных механических систем, в частности, движения квадрокоптеров, возникают задачи управления движением с многоточечными промежуточными условиями (см. [12–14]). В подобных задачах управления наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями необходимо также учитывать многоточечные промежуточные условия (см. [15–17]). Эти задачи управления имеют важное прикладное и теоретическое значение.

В работе рассматривается пространственное движение квадрокоптера. Он имеет шесть степеней свободы и четыре управляющих воздействия. Управляющие силы и моменты формируются с помощью четырех двигателей, вращающих установленные на их роторах воздушные винты. Перемещение квадрокоптера в пространстве без вращения вокруг одной из осей, т. е. без наклона квадрокоптера невозможно. Для выполнения требуемого наклона квадрокоптера необходимо изменить крутящий момент относительно одной из осей. Математическая модель квадрокоптера с четырьмя двигателями незаменима при последующем моделировании алгоритма управления и движения. В математической модели полета в форме дифференциальных уравнений Ньютона–Эйлера учитываются особенности динамики системы. Для линеаризованной математической модели движения квадрокоптера рассмотрена задача построения законов управления с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями части координат в некоторые моменты времени. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения, учитывающие промежуточные значения части координат в заданные моменты времени. В качестве приложения предложенного подхода для конкретных численных значений определены явные выражения функции управления, соответствующие фазовые траектории и построены графики полученных функций.

1. Математическая модель динамики квадрокоптера и постановка задачи

В качестве динамического объекта управления рассматривается модель геометрического симметричного беспилотного летательного аппарата (БПЛА) — квадрокоптера, построенного по классической четырехвинтовой схеме, структура которого представлена на рис. 1.

Положение квадрокоптера с массой m в пространстве характеризуется координатами x, y, z центра масс аппарата в неподвижной декартовой системе координат и тремя углами (углы Эйлера) φ, ϑ, ψ поворота вокруг осей системы координат, жестко связанной

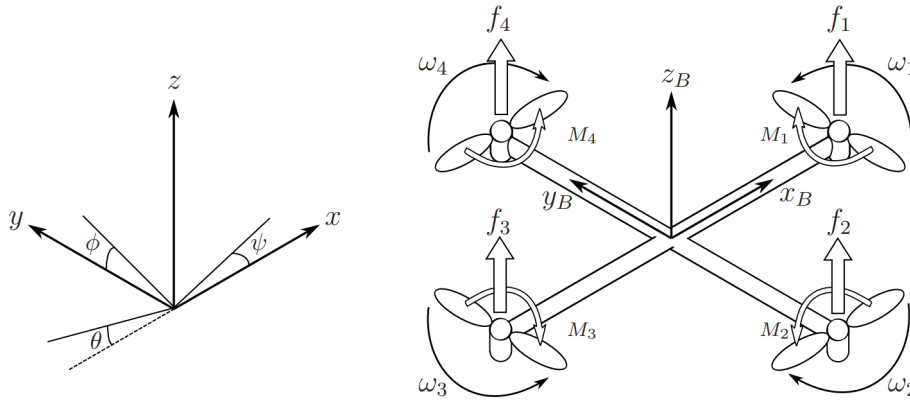


Рис. 1. Структурная схема БПЛА

с аппаратом, причем начало координат совпадает с центром масс аппарата. Здесь φ — угол тангажа (т. е. угол наклона квадрокоптера относительно оси Ox), ϑ — угол крена (т. е. угол наклона БПЛА относительно оси Oy), ψ — угол рыскания (т. е. угол наклона квадрокоптера относительно оси Oz). Движение квадрокоптера в задачах динамики управления полетом рассматривается как сложное — движение центра масс и движение вокруг центра масс [9–11]. Для составления математической модели квадрокоптера приняты следующие допущения [1–3]:

- квадрокоптер симметричен относительно осей x и y ;
- рама квадрокоптера и его винты абсолютно жесткие;
- каждый двигатель располагается на конце стержня;
- тяга, создаваемая каждым винтом, перпендикулярна плоскости xu .

Движение квадрокоптера осуществляется благодаря четырем винтам. Каждый из винтов имеет свой привод (электродвигатель), придающий ему вращение вокруг вертикальной оси. Таким образом, каждый из двигателей создает тягу и момент вращения. Движение управляемого квадрокоптера основано на создании изменяемых по величине и направлению сил и моментов, влияющих на квадрокоптер.

Описанная динамическая система имеет четыре управляющих воздействия, соответствующих угловым скоростям четырех винтов.

Угловые скорости винтов обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, силы тяги, создаваемые вращением винтов — через f_1, f_2, f_3, f_4 , а моменты, которые образуются в результате вращения винтов — через M_1, M_2, M_3, M_4 . Для получения математической модели динамики квадрокоптера введем неподвижную систему координат $Oxyz$, а в центре масс O_B квадрокоптера закрепим неподвижную систему координат $O_Bx_By_Bz_B$. Обозначим через x, y, z координаты центра масс квадрокоптера относительно системы координат $Oxyz$. Опишем вращательное движение квадрокоптера в инерциальной системе координат $Oxyz$, используя углы Эйлера φ, ϑ, ψ . Тогда пространственное положение квадрокоптера описывается двумя векторами

$$\xi = (x, y, z)^T, \quad \eta = (\varphi, \vartheta, \psi)^T.$$

Здесь и далее буква « T » в верхнем индексе означает операцию транспонирования. В системе координат $O_Bx_By_Bz_B$ запишем векторы линейной скорости V_B и угловой скорости v

$$V_B = (V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz})^T, \quad v = (p, q, r)^T.$$

А матрица поворота системы координат $O_Bx_By_Bz_B$ относительно неподвижной инерциальной системы координат $Oxyz$ будет:

$$R = \begin{pmatrix} C_\psi C_\vartheta & C_\psi S_\vartheta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\vartheta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\vartheta & S_\psi S_\vartheta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\vartheta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix},$$

где $C_\alpha = \cos \alpha$, $S_\alpha = \sin \alpha$, $\alpha = \varphi, \vartheta, \psi$.

Легко проверить, что матрица R ортогональна, следовательно, $R^{-1} = R^T$, и является матрицей перехода из инерциальной системы координат $Oxyz$ в систему $O_Bx_By_Bz_B$.

Матрицы R и R^{-1} используются для получения проекций вектора V_B в инерциальной системе координат.

Матрица W преобразования из инерциальной системы координат $Oxyz$ в систему $O_Bx_By_Bz_B$ и матрица W^{-1} обратного преобразования для вектора угловой скорости v в данном случае имеют вид

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & C_\vartheta S_\varphi \\ 0 & -S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix}$$

и

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & S_\varphi T_\vartheta & C_\varphi T_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & \frac{S_\varphi}{C_\vartheta} & \frac{C_\varphi}{C_\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Здесь $T_\alpha = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha = \varphi, \vartheta, \psi$. Заметим, что матрица W обратима тогда и только тогда, когда $\vartheta \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Теперь, используя матрицу преобразования W и ее обратную W^{-1} , получаем

$$\dot{\eta} = W^{-1}v, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_\varphi T_\vartheta & C_\varphi T_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & \frac{S_\varphi}{C_\vartheta} & \frac{C_\varphi}{C_\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и

$$v = W_\eta \dot{\eta}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & C_\vartheta S_\varphi \\ 0 & -S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Благодаря указанному на рис. 1 выбору системы координат $O_Bx_By_Bz_B$, квадрокоптер расположен симметрично относительно осей O_Bx_B и O_By_B . Следовательно, инерционная матрица I будет диагональной

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix},$$

где I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} — моменты инерции квадрокоптера относительно осей Ox , Oy и Oz , соответственно, и $I_{xx} = I_{yy}$.

Угловая скорость ω_i винта i ($i = \overline{1,4}$) создает силу тяги f_i ($i = \overline{1,4}$), направленную по оси винта. Угловая скорость ω_i , ($i = \overline{1,4}$) и угловое ускорение $\dot{\omega}_i$, ($i = \overline{1,4}$) винта i ($i = \overline{1,4}$) также создают крутящий момент M_i ($i = \overline{1,4}$) вокруг оси винта. Сила тяги и крутящий момент определяются по формулам

$$f_i = k\omega_i^2, \quad M_i = b\omega_i^2 + I_M\dot{\omega}_i, \quad i = \overline{1,4},$$

где k — постоянная подъемной силы, b — постоянная сопротивления (т. е. k и b — коэффициенты пропорциональности, характеризующие особенности роторов), I_M — момент инерции винта (одинаковый для всех винтов). Влияние углового ускорения $\dot{\omega}_i$ ($i = \overline{1,4}$) настолько мало, что им можно пренебречь. Суммарная сила тяги f сил f_1, f_2, f_3, f_4 направлена вдоль оси $O_B z_B$. Обозначим τ_B — вектор крутящего момента, который включает крутящие моменты $\tau_\varphi, \tau_\vartheta, \tau_\psi$, соответствующие углам Эйлера φ, ϑ, ψ . Сила тяги и крутящий момент определяются по формулам

$$f = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2, \quad F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lk(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 M_i \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где l — расстояние от осей винта (т. е. центра роторов) до центра масс квадрокоптера.

Физический смысл формул (1.2) очевиден. Можно изменить угловые скорости четвертого и второго винтов, тем самым изменить угол крена. Таким же образом можно изменить угол наклона (тангажа), изменяя скорости вращения первого и третьего винтов. Для изменения угла рыскания можно уменьшить скорости вращения двух диагональных винтов (второго и четвертого) и увеличить скорости вращения двух других (первого и третьего) или наоборот, увеличить скорости вращения двух диагональных винтов (второго и четвертого) и уменьшить скорости вращения двух других (первого и третьего).

Для получения дифференциальных уравнений движения квадрокоптера воспользуемся вторым законом Ньютона и динамическими уравнениями Эйлера. Таким образом, относительно системы координат $O_B x_B y_B z_B$ получим (подробнее см. [9–11]) уравнения

$$m\dot{V}_B + v \times mV_B = R^T G + F_B,$$

где $G = (0, 0, -g)^T$, g — ускорение свободного падения. А относительно системы координат $Oxyz$ будем иметь

$$m\ddot{\xi} = G + RF_B,$$

или

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{f}{m} \begin{pmatrix} C_\psi S_\vartheta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi S_\vartheta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

В системе координат $O_B x_B y_B z_B$ сумма углового ускорения инерции $I\dot{v}$, центробежных сил $v \times Iv$ и гироскопических сил Γ равна внешнему крутящему моменту

$$I\dot{v} + v \times (Iv) + \Gamma = \tau_B, \quad (1.4)$$

где

$$\Gamma = I_r \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_\Gamma, \quad \omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4.$$

Здесь I_r — момент инерции квадрокоптера относительно его мгновенной оси вращения. Таким образом, из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \dot{v} &= I^{-1} \left(- \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx}p \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r \end{pmatrix} - I_r \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_\Gamma + \tau_B \right), \\ \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{(I_{yy}-I_{zz})qr}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{zz}-I_{xx})pr}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{xx}-I_{yy})pq}{I_{zz}} \end{pmatrix} - I_r \begin{pmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} \omega_\Gamma + \begin{pmatrix} \frac{\tau_\varphi}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\vartheta}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Имея угловые ускорения в системе координат $O_Bx_By_Bz_B$, можно получить угловые ускорения в системе координат $Oxyz$, используя матрицу преобразования W^{-1} и ее производную по времени.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \frac{d}{dt} (W^{-1}v) = \frac{d}{dt} (W^{-1})v + W^{-1}\dot{v} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}C_\varphi T_\vartheta + \frac{\dot{\vartheta}S_\varphi}{C_\vartheta^2} & -\dot{\varphi}S_\varphi C_\vartheta + \frac{\dot{\vartheta}C_\varphi}{C_\vartheta^2} \\ 0 & -\dot{\varphi}S_\varphi & -\dot{\varphi}C_\varphi \\ 0 & \frac{\dot{\varphi}C_\varphi}{C_\vartheta} + \frac{\dot{\varphi}S_\varphi T_\vartheta}{C_\vartheta} & -\frac{\dot{\varphi}S_\varphi}{C_\vartheta} + \frac{\dot{\vartheta}C_\varphi T_\vartheta}{C_\vartheta} \end{pmatrix} v + W^{-1}\dot{v}. \end{aligned}$$

Из (1.1), (1.3), (1.5) получим следующую систему уравнений относительно компонент векторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{f}{m}C_\psi S_\vartheta C_\varphi + \frac{f}{m}S_\psi S_\varphi, & \ddot{y} &= \frac{f}{m}S_\psi S_\vartheta C_\varphi - \frac{f}{m}C_\psi S_\varphi, & \ddot{z} &= -g + \frac{f}{m}C_\vartheta C_\varphi, \\ \dot{\varphi} &= p + \frac{S_\varphi S_\vartheta}{C_\vartheta}q + \frac{C_\varphi S_\vartheta}{C_\vartheta}r, & \dot{\vartheta} &= C_\varphi q - S_\varphi r, & \dot{\psi} &= \frac{S_\varphi}{C_\vartheta}q + \frac{C_\varphi}{C_\vartheta}r, \\ \dot{p} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} - I_r \frac{q}{I_{xx}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\varphi}{I_{xx}}, & \dot{q} &= \frac{(I_{zz} - I_{xx})pr}{I_{yy}} - I_r \frac{p}{I_{yy}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\vartheta}{I_{yy}}, \\ & & \dot{r} &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})pq}{I_{zz}} - I_r \frac{q}{I_{zz}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Линеаризуем математическую модель квадрокоптера (1.6). Линеаризацию произведем в окрестности начала координат, считая, что углы φ, ϑ, ψ — малы, соответствующие синусы равны нулю и косинусы равны единице. Далее введя обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= \dot{x}, & x_3 &= y, & x_4 &= \dot{y}, & x_5 &= z, & x_6 &= \dot{z}, \\ x_7 &= \varphi, & x_8 &= \vartheta, & x_9 &= \psi, & x_{10} &= p, & x_{11} &= q, & x_{12} &= r, \end{aligned}$$

окончательно получим систему линеаризованных уравнений, описывающих динамику линейной модели квадрокоптера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= gx_8, & \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -gx_7, & \dot{x}_5 &= x_6, & \dot{x}_6 &= u_1, \\ \dot{x}_7 &= x_{10}, & \dot{x}_8 &= x_{11}, & \dot{x}_9 &= x_{12}, & \dot{x}_{10} &= \frac{u_2}{I_{xx}}, & \dot{x}_{11} &= \frac{u_3}{I_{yy}}, & \dot{x}_{12} &= \frac{u_4}{I_{zz}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $u_1 = \frac{f}{m} - g$, $u_2 = \tau_\varphi$, $u_3 = \tau_\vartheta$, $u_4 = \tau_\psi$ — управляющие воздействия. Далее будем обозначать $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система (1.7) является вполне управляемой (см. [18, гл. 6]).

Пусть заданы начальное (при $t = t_0$) и конечное (при $t = T$) состояния системы (1.7)

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_{12}(t_0))^T, \quad x(T) = (x_1(T), \dots, x_{12}(T))^T, \quad (1.8)$$

а также значения

$$x_5(t_1), \quad x_1(t_2), \quad x_3(t_2) \quad (1.9)$$

части координат фазового вектора в заданные промежуточные моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ ($t_0 < t_1 < t_2 < T$).

Рассмотрим следующую задачу: требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $U(t)$, $t \in [t_0, T]$ и программное движение $x(t)$, удовлетворяющие системе (1.7) и условиям (1.8) и (1.9), а также построить их.

2. Решение задачи

Решение уравнения (1.7) с помощью формулы Коши запишем следующим образом (см. [18, § 5], [19, с. 13]):

$$x[t] = X[t, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^t H[t, \tau]U(\tau)d\tau, \quad (2.1)$$

где $X[t, \tau]$ — нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.7), а $H[t, \tau]$ — импульсно-переходная матрица, которая имеет вид:

$$H[t, \tau] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t - \tau & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g(t-\tau)^3}{6I_{xx}} & -\frac{g(t-\tau)^2}{2I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{g(t-\tau)^3}{6I_{yy}} & \frac{g(t-\tau)^2}{2I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix}^T.$$

Применяя подходы, приведенные в работах [15], [16, гл. 3], [17], для определения законов управления с учетом условий (1.8) и (1.9) получим следующие интегральные соотношения

$$\int_{t_0}^T \frac{g(T-t)^3}{6I_{yy}} u_3(t) dt = C_1, \quad \int_{t_0}^T \frac{g(T-t)^2}{2I_{yy}} u_3(t) dt = C_2, \quad \int_{t_0}^T -\frac{g(T-t)^3}{6I_{xx}} u_2(t) dt = C_3,$$

$$\int_{t_0}^T -\frac{g(T-t)^2}{2I_{xx}} u_2(t) dt = C_4, \quad \int_{t_0}^T (T-t) u_1(t) dt = C_5, \quad \int_{t_0}^T u_1(t) dt = C_6,$$

$$\int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{xx}} u_2(t) dt = C_7, \quad \int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{yy}} u_3(t) dt = C_8, \quad \int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{zz}} u_4(t) dt = C_9,$$

$$\int_{t_0}^T \frac{1}{I_{xx}} u_2(t) dt = C_{10}, \quad \int_{t_0}^T \frac{1}{I_{yy}} u_3(t) dt = C_{11}, \quad \int_{t_0}^T \frac{1}{I_{zz}} u_4(t) dt = C_{12},$$

$$\int_{t_0}^{t_2} \frac{g(t_2-t)^3}{6I_{yy}} u_3(t) dt = C_{13}, \quad \int_{t_0}^{t_2} -\frac{g(t_2-t)^2}{6I_{xx}} u_2(t) dt = C_{14}, \quad \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t) u_1(t) dt = C_{15},$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= x_1(T) - x_1(t_0) - x_2(t_0)(T - t_0) - \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_8(t_0) - \frac{g}{6}(T - t_0)^3 x_{11}(t_0), \\
 C_2 &= x_2(T) - x_2(t_0) - x_8(t_0)g(T - t_0) - \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_{11}(t_0), \\
 C_3 &= x_3(T) - x_3(t_0) - x_4(t_0)(T - t_0) + \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_7(t_0) + \frac{g}{6}(T - t_0)^3 x_{10}(t_0), \\
 C_4 &= x_4(T) - x_4(t_0) + x_7(t_0)g(T - t_0) + \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_{10}(t_0), \\
 C_5 &= x_5(T) - x_5(t_0) - x_6(t_0)(T - t_0), \\
 C_j &= x_j(T) - x_j(t_0), \quad j = 6, 10, 11, 12, \\
 C_7 &= x_7(T) - x_7(t_0) - x_{10}(t_0)(T - t_0), \quad C_8 = x_8(T) - x_8(t_0) - x_{11}(t_0)(T - t_0), \\
 C_9 &= x_9(T) - x_9(t_0) - x_{12}(t_0)(T - t_0), \\
 C_{13} &= x_1(t_2) - x_1(t_0) - x_2(t_0)(t_2 - t_0) - \frac{g}{2}(t_2 - t_0)^2 x_8(t_0) - \frac{g}{6}(t_2 - t_0)^3 x_{11}(t_0), \\
 C_{14} &= x_3(t_2) - x_3(t_0) - x_4(t_0)(t_2 - t_0) + \frac{g}{2}(t_2 - t_0)^2 x_7(t_0) + \frac{g}{6}(t_2 - t_0)^3 x_{10}(t_0), \\
 C_{15} &= x_5(t_1) - x_5(t_0) - (t_1 - t_0)x_6(t_0).
 \end{aligned}$$

В векторно-матричной форме полученные интегральные соотношения будут иметь вид

$$\int_{t_0}^T H(t)U(t)dt = \sigma(t_0, t_1, t_2, T), \quad (2.2)$$

где $\sigma(t_0, t_1, t_2, T) = (C_1, \dots, C_{15})^T$; элементы 15×4 матрицы $H(t) = H[T, t]$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 h_1^{(3)}[T, t] &= \frac{g(T-t)^3}{6I_{yy}}, \quad h_2^{(3)}[T, t] = \frac{g(T-t)^2}{2I_{yy}}, \quad h_3^{(2)}[T, t] = -\frac{g(T-t)^3}{6I_{xx}}, \\
 h_4^{(2)}[T, t] &= -\frac{g(T-t)^2}{2I_{xx}}, \quad h_5^{(1)}[T, t] = (T-t), \quad h_6^{(1)}[T, t] = 1, \quad h_7^{(2)}[T, t] = \frac{T-t}{I_{xx}}, \\
 h_8^{(3)}[T, t] &= \frac{T-t}{I_{yy}}, \quad h_9^{(4)}[T, t] = \frac{T-t}{I_{zz}}, \quad h_{10}^{(2)}[T, t] = \frac{1}{I_{xx}}, \quad h_{11}^{(3)}[T, t] = \frac{1}{I_{yy}}, \\
 h_{12}^{(4)}[T, t] &= \frac{1}{I_{zz}}, \quad h_{13}^{(1)}[t_1, t] = \begin{cases} t_1 - t & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t \leq T \end{cases}, \\
 h_{14}^{(3)}[t_2, t] &= \begin{cases} -\frac{g(t_2-t)^3}{6I_{yy}} & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}, \quad h_{15}^{(2)}[t_2, t] = \begin{cases} -\frac{g(t_2-t)^3}{6I_{xx}} & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}
 \end{aligned}$$

(нижний индекс j функции $h_j^{(i)}$ обозначает номер строки, а верхний индекс i — номер столбца матрицы), все остальные не приведенные элементы матрицы $H(t)$ равны нулю.

Из (2.2) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Система (1.7) с условиями (1.8) и (1.9) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора $\sigma(t_0, t_1, t_2, T)$ можно найти управление $U(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющее условию (2.2).

Управляющее воздействие $U(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (2.2), представим в виде (см. [16, с. 116–118], [19, § 2])

$$U(t) = H^T(t)Q^{-1}\sigma(t_0, t_1, t_2, T) + e(t), \quad (2.3)$$

где

$$Q = \int_{t_0}^T H(t)H^T(t)dt, \quad (2.4)$$

а вектор-функция $e(t)$ удовлетворяет соотношению $\int_{t_0}^T H(t)e(t)dt = 0$.

Таким образом, решение задачи можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [19, гл. I].

Теорема 2.1. *Для того чтобы существовало программное управление (2.3) и соответствующее ему решение системы (1.7), удовлетворяющее условиям (2.1) (или (2.2)), необходимо и достаточно, чтобы определяемая соотношением (2.4) матрица Q была не особой или чтобы ранги матрицы Q и расширенной матрицы $\{Q, \sigma\}$ совпадали.*

Здесь матрица Q имеет размерность (15×15) и

$$\det Q = \frac{g^{12}T^{23}(T-t_1)^3 t_1^3 (T-t_2)^{14} t_2^{14}}{20808145575327301632000000 I_{xx}^{10} I_{yy}^{10} I_{zz}^4}.$$

Отсюда видно, что матрица Q не особая.

Подставляя выражение для функции управления $U(t)$ в формулу Коши (2.1), получим соответствующее программное движение. Затем, если найденные выражения функции управления $U(t)$ подставить в (1.7) и проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора на каждом промежутке времени, получим законы движения.

Иллюстрацией вышеизложенного служит следующий пример.

Пример 2.1. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 6$, $T = 12$,

$$x(0) = (0, 2, 0, 5, 0, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$x(T) = (0, 5, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 50, 80, 100)^T,$$

$$x_5(t_1) = 50, \quad x_1(t_2) = 80, \quad x_3(t_2) = 100.$$

По вышеприведенным формулам вычислим значения элементов матриц $H^T(t)$, Q^{-1} и вектора σ и подставим их значения в формулы (2.3). Для простоты предполагая, что $e(t) = 0$, получим явные выражения для управляющих воздействий в следующем виде:

$$u_1(t) = \begin{cases} \frac{116}{3} - \frac{53t}{2} & \text{при } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{284}{15} + \frac{23t}{10} & \text{при } 2 < t \leq 12 \end{cases},$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -\frac{22021}{1512} + \frac{2935t}{168} - \frac{172535t^2}{36288} + \frac{33445t^3}{93312} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{8719}{72} - \frac{76145t}{1512} + \frac{79235t^2}{12096} - \frac{176125t^3}{653184} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases},$$

$$u_3(t) = \begin{cases} -\frac{149225}{10584} + \frac{41539t}{3528} - \frac{646183t^2}{254016} + \frac{15107t^3}{93312} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{29327}{1176} - \frac{81967t}{10584} + \frac{20017t^2}{28224} - \frac{1757t^3}{93312} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases},$$

$$u_4(t) = -\frac{25}{8} + \frac{31t}{48}.$$

Графики управляющих воздействий приведены ниже (см. рис. 2–5).

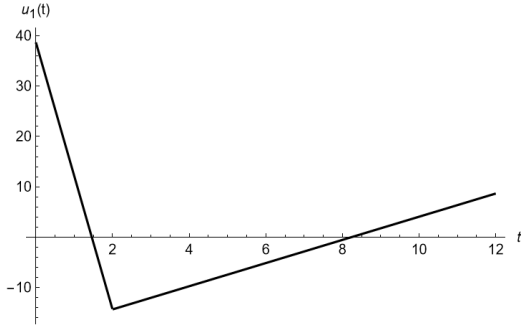


Рис. 2. График функции управления $u_1(t)$

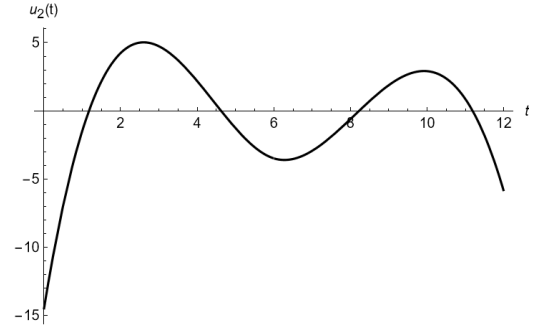


Рис. 3. График функции управления $u_2(t)$

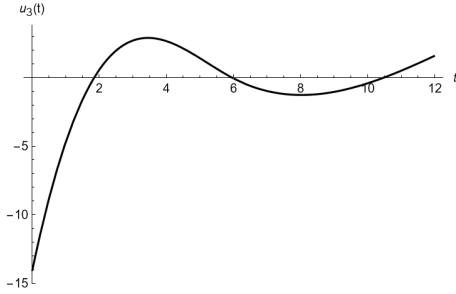


Рис. 4. График функции управления $u_3(t)$

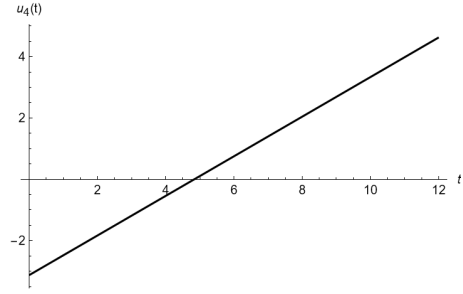


Рис. 5. График функции управления $u_4(t)$

Если подставить найденные выражения функции управления $U(t)$ в уравнения (1.7) и проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора на каждом промежутке времени, получим законы фазового вектора. Считаем целесообразным привести только законы движения для геометрических координат, которые имеют следующие явные виды:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \begin{cases} 2t + \frac{49t^2}{5} + \frac{49t^3}{10} - \frac{29845t^4}{10368} + \frac{41539t^5}{86400} - \frac{646183t^6}{18662400} + \frac{105749t^7}{111974400} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{7378}{25} - \frac{25673t}{75} + \frac{27293t^2}{150} - \frac{23177t^3}{540} + \frac{29327t^4}{5760} - \frac{81967t^5}{259200} + \\ + \frac{20017t^6}{2073600} - \frac{12299t^7}{111974400} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\
 x_3(t) &= \begin{cases} 5t - \frac{147t^2}{5} - \frac{49t^3}{30} + \frac{154147t^4}{25920} - \frac{4109t^5}{2880} + \frac{241549t^6}{1866240} - \frac{46823t^7}{11197440} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{10256}{5} + \frac{35971t}{15} - \frac{18389t^2}{15} + \frac{89299t^3}{270} - \frac{427231t^4}{8640} + \\ + \frac{106603t^5}{25920} - \frac{110929t^6}{622080} + \frac{7045t^7}{2239488} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\
 x_5(t) &= \begin{cases} \frac{1}{12} (48t + 232t^2 - 53t^3) & \text{при } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{60} (-2304 + 3696t - 568t^2 + 23t^3) & \text{при } 2 < t \leq 12 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Графики фазовой вектор-функции $x(t)$ по геометрическим координатам $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $x_5(t)$ при $t \in [0, 12]$ представлены на рис. 6–8. Траектория движения изображена на рис. 9.

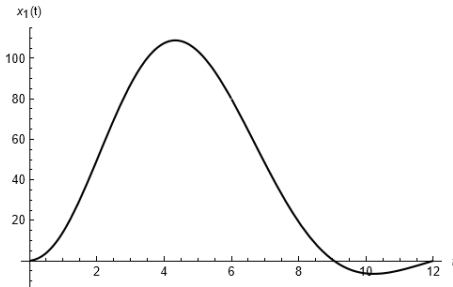
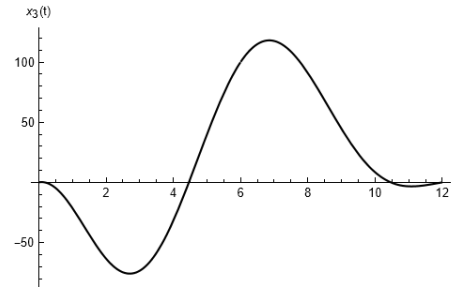
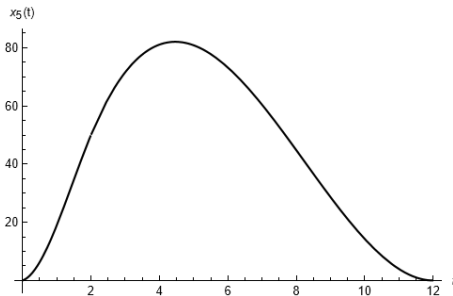
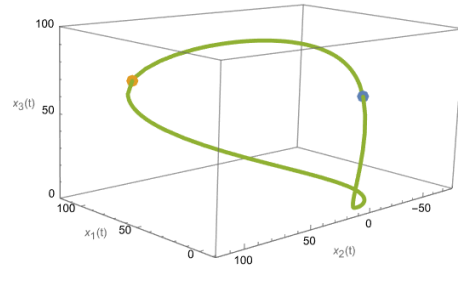
Рис. 6. График функции $x_1(t)$ Рис. 7. График функции $x_3(t)$ Рис. 8. График функции $x_5(t)$ 

Рис. 9. Траектория движения

References

- [1] Д. В. Ситников, Ю. А. Бурьян, Г. С. Русских, “Автопилот мультикоптера”, *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2012, № 7, 213–221. [D. V. Sitnikov, Y. A. Burian, G. S. Russkih, “Motion control system of multicopter”, *Proceedings Of The Tula States University. Technical sciences*, 2012, № 7, 213–221 (In Russian)].
- [2] Д. Т. Рубин, В. Н. Конев, А. В. Стариковский, А. А. Шептунов, А. С. Смирнов, А. М. Толстая, “Разработка квадрокоптеров со специальными свойствами для проведения разведывательных операций”, *Спецтехника и связь*, 2012, № 1, 28–30. [D. T. Rubin, V. N. Konev, A. V. Starikovskiy, A. A. Sheptunov, A. S. Smirnov, A. M. Tolstaya, “Development of special quadcopters for survey works”, *Special Machinery and Communications*, 2012, № 1, 28–30 (In Russian)].
- [3] М. И. Эпов, И. Н. Злыгостев, “Применение беспилотных летательных аппаратов в аэрогеофизической разведке”, *Интерэкспо Гео-Сибирь*, 2:3 (2012), 22–27. [M. I. Epov, I. N. Zlygostev, “Application of unmanned aerial vehicles in airborne geophysical reconnaissance”, *Interekspo GEO-Sibir*, 2:3 (2012), 22–27 (In Russian)].
- [4] С. В. Телухин, В. В. Матвеев, “Беспилотный летательный аппарат как объект управления”, *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2008, № 10, 7–10. [S. V. Telukhin, V. V. Matveev, “Unmanned aerial vehicle as an object management”, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, № 10, 7–10 (In Russian)].
- [5] T. Chettibi, M. Haddad, “Dynamic modelling of a quadrotor aerial robot”, *Journées D’études Nationales de Mécanique*, 2007, 22–27.
- [6] A. Mokhtari, A. Benallegue, “Dynamic feedback controller of Euler angles and wind parameters estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation. V. 3, Proceedings of the International Conference ICRA ’04 (New Orleans, LA USA, 26 April 2004 – 01 May 2004)*, IEEE, 2004, 2359–2366.
- [7] L. Derafa, T. Madani, A. Benallegue, “Dynamic modelling and experimental identification of four rotors helicopter parameters”, *IEEE International Conference on Industrial Technology. V. Art.*

- 4237837, Proceedings of the International Conference (Mumbai, India, 15–17 December 2006), IEEE, 2006, 1834–1839.
- [8] А. А. Маргун, К. А. Зименко, Д. Н. Базылев и др., “Система управления беспилотным летательным аппаратом, оснащённым робототехническим манипулятором”, *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2014, №6 (94), 54–62. [A. A. Margun, K. A. Zimenko, D. N. Bazylev, A. A. Bobtsov, A. S. Kremlev, D. D. Ibraev, “Control system for unmanned aircraft equipped with robotics arm”, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, №6 (94), 54–62 (In Russian)].
- [9] T. Luukkonen, “Modelling and control of quadcopter”, 2011. URL: https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf.
- [10] T. Puls, A. Hein, “3D trajectory control for quadrocopter”, *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Proceedings of the International Conference (Taipei, Taiwan, 18–22 October 2010), IEEE, 2010, 640–645.
- [11] Z. Benić, P. Piljek and D. Kotarski, “Mathematical modelling of unmanned aerial vehicles with four rotors”, *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, **14**:1 (2016), 88–100.
- [12] Л. Т. Ащепков, “Оптимальное управление системой с промежуточными условиями”, *Прикладная математика и механика*, **45**:2 (1981), 215–222; англ. пер.: L. T. Ashchepkov, “Optimal control of a system with intermediate conditions”, *J. Appl. Math. Mech*, **45**:2 (1981), 153–158.
- [13] В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок, “Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазоограничениями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **49**:6, 981–997; англ. пер.: V. A. Dykhta, O. N. Samsonyuk, “A maximum principle for smooth optimal impulsive control problems with multipoint state constraints”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **49**:6 (2009), 942–957.
- [14] В. Р. Барсегян, “Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени”, *Доклады НАН РА*, **110**:3 (2010), 251–260. [V. R. Barseghyan, “Controlling of linear dynamic systems with restrictions on values of parts of coordinates of a phase vector in the intermediate moments of time”, *Reports NAS RA*, **110**:3 (2010), 251–260 (In Russian)].
- [15] V. R. Barseghyan, T. V. Barseghyan, “On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions”, *Automation and Remote Control*, **76**:4 (2015), 549–559.
- [16] В. Р. Барсегян, *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, Наука, М., 2016, 230 с. [V. R. Barseghyan, *Control of Composite Dynamic Systems and Systems with Multipoint Intermediate Conditions*, Nauka Publ., Moscow, 2016 (In Russian), 230 pp.]
- [17] V. Barseghyan, S. Solodusha, “On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time”, *IEEE International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, Proceedings of the International Conference (Sochi, Russian Federation, 05–11 September 2021), IEEE, 2021, 343–349.
- [18] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968, 476 с. [N. N. Krasovskii, *Theory of Control of Motion*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 476 pp.]
- [19] В. И. Zubov, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975, 496 с. [V. I. Zubov, *Lectures on Control Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 496 pp.]

Информация об авторах

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Республики Армения; профессор кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: barseghyan@sci.am

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Information about the authors

Vanya R. Barseghyan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Leading Scientific Researcher of Institute of Mechanics of NAS of RA; Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail: barseghyan@sci.am

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Симонян Тамара Алексановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: simtom09@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0434-6183>

Матевосян Арам Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: matevosaram@gmail.com, amatevosyan@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3432-2253>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Барсегян Ваня Рафаелович
E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 13.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Tamara A. Simonyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Associate Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail:simtom09@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0434-6183>

Aram G. Matevosyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Associate Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail: matevosaram@gmail.com, amatevosyan@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3432-2253>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vanya R. Barseghyan
E-mail: barseghyan@sci.am

Received 13.07.2023
Reviewed 07.02.2024
Accepted for press 11.03.2024